WYBRANE wzory matematyczne **na egzamin eksternistyczny** z zakresu szkoły podstawowej

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Warszawa 2024

Materiał został opracowany przez Centralną Komisję Egzaminacyjną.

Spis treści

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } \ x \geq 0 \\ -x & \text{dla } \ x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu x od punktu 0.

- Dla dowolnej liczby x mamy:

$$|x| \geq 0 \qquad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \qquad |-x| = |x|$$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby rzeczywistej a definiujemy jej n-tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

  W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

  Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

  W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Jeżeli r, s są liczbami całkowitymi, to dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$ obowiązują wzory:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

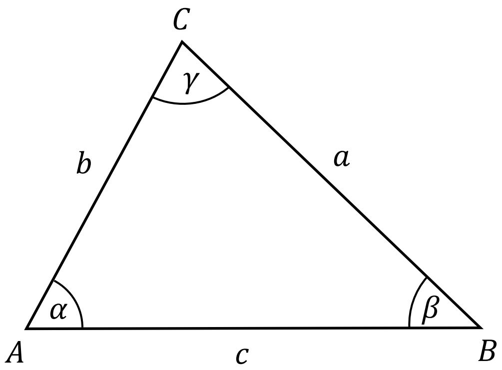
$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

3. PLANIMETRIA

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków w trójkącie ABC
α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach A, B i C
h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone – odpowiednio – z wierzchołków A, B i C
Ob – obwód trójkąta ABC

- <u>Trójkąt różnoboczny</u>



- Z odcinków o długościach a, b, c można zbudować trójkąt, gdy spełniony jest warunek:

$$|b - c| < a < b + c$$

- Suma kątów wewnętrznych α, β i γ trójkąta jest równa:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$

- Obwód trójkąta ABC:

$$Ob = a + b + c$$

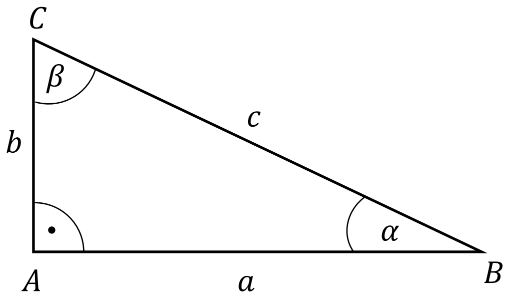
- Pole trójkąta ABC:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c$$

- Trójkąt prostokątny

Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b – długości przyprostokątnych trójkąta ABC
c – długość przeciwprostokątnej trójkąta ABC
α, β – miary kątów ostrych trójkąta leżących – odpowiednio – przy wierzchołkach B i C



$$\boxed{\alpha + \beta = 90^\circ}$$

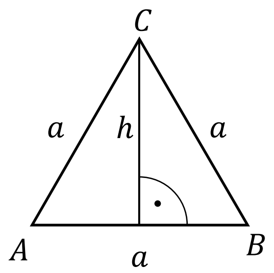
- Twierdzenie Pitagorasa

  W trójkącie prostokątnym kwadrat długości przeciwprostokątnej jest równy sumie kwadratów długości obu przyprostokątnych.

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- Trójkąt równoboczny

  a – długość boku trójkąta równobocznego
  h – wysokość trójkąta równobocznego
  P_Δ – pole trójkąta równobocznego



- Wysokość i pole trójkąta równobocznego:

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_\Delta = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

- <u>Cechy przystawania trójkątów</u>

a) cecha przystawania „**bok–bok–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom boków trójkąta KLM, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$, $|CA| = |ML|$.

b) cecha przystawania „**bok–kąt–bok**” dla trójkątów ABC i KLM:

długości dwóch boków trójkąta ABC są równe odpowiednim długościom dwóch boków trójkąta KLM i kąty między tymi parami boków są przystające, np.: $|AB| = |KL|$, $|BC| = |KM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$.

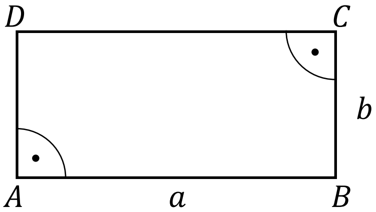
c) cecha przystawania „**kąt–bok–kąt**” dla trójkątów ABC i KLM:

długość jednego boku trójkąta ABC jest równa długości jednego boku trójkąta KLM i kąty przyległe do tego boku trójkąta ABC są przystające do odpowiednich kątów przyległych do odpowiedniego boku trójkąta KLM, np.:
$|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle KLM|$ i $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle LKM|$ i $|AB| = |KL|$.

- <u>Czworokąty</u>

- <u>Prostokąt</u> – czworokąt, który ma wszystkie kąty równe (proste).

a, b – długości boków prostokąta



- Obwód Ob prostokąta:

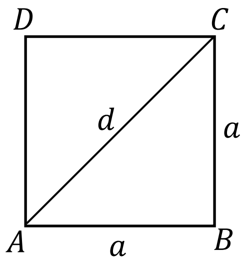
$$\boxed{Ob = 2(a + b)}$$

- Pole P prostokąta:

$$\boxed{P = a \cdot b}$$

- <u>Kwadrat</u> – prostokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

  a – długość boku kwadratu
  d – długość przekątnej kwadratu



  - Długość przekątnej d kwadratu:

$$d = a\sqrt{2}$$

  - Obwód Ob kwadratu:

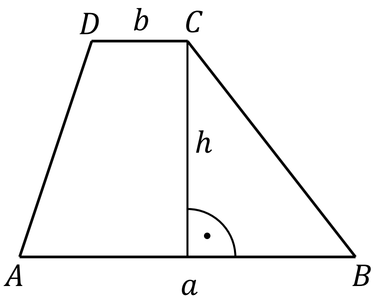
$$Ob = 4a$$

  - Pole P kwadratu:

$$P = a \cdot a = a^2$$

- <u>Trapez</u> – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

  a, b – długości podstaw trapezu
  h – wysokość trapezu

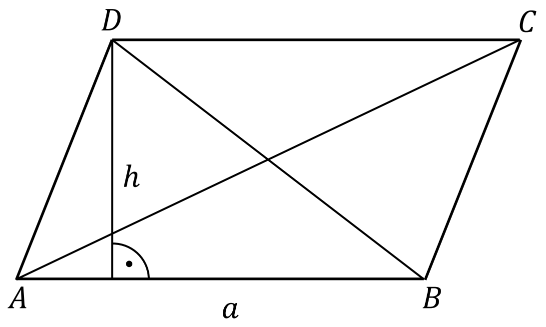


  - Pole P trapezu:

$$P = \frac{a + b}{2} \cdot h$$

- Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

  a – długość boku równoległoboku
  h – wysokość równoległoboku

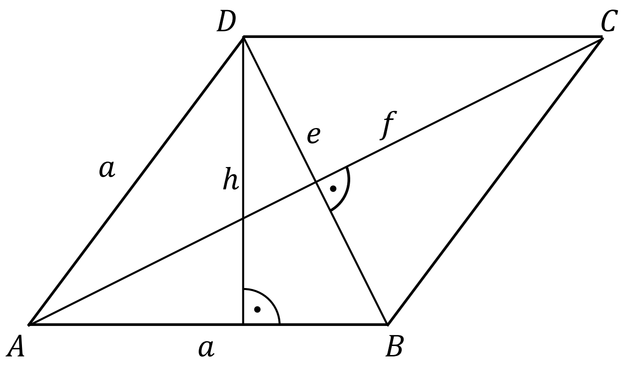


  - Pole P równoległoboku:

$$\boxed{P = ah}$$

- Romb – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych jednakowej długości.

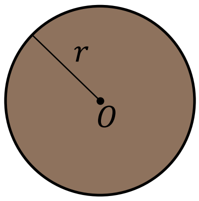
  a – długość boku rombu
  h – wysokość rombu
  e, f – długości przekątnych rombu



  - Pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = \frac{e \cdot f}{2}$$

- Koło



  - Pole P koła o promieniu r:

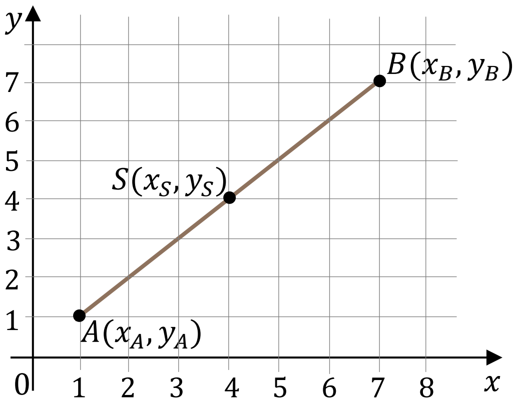
$$P = \pi r^2$$

  - Obwód L koła (długość okręgu) o promieniu r:

$$L = 2\pi r$$

4. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE

- Długość odcinka



Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

5. STEREOMETRIA

Przyjmujemy oznaczenia:

P_c – pole powierzchni całkowitej

P_p – pole podstawy

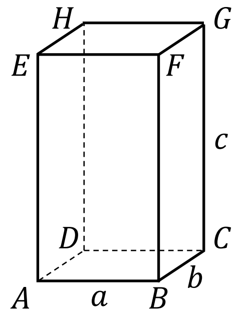
P_b – pole powierzchni bocznej

V – objętość

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$

$$V = abc$$

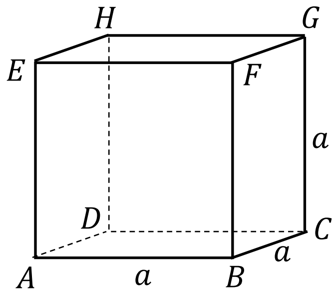


gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu.

- Sześcian

$$P_c = 6a^2$$

$$V = a^3$$

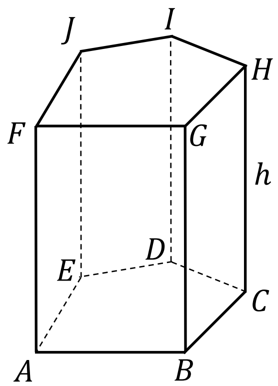


gdzie a jest długością krawędzi sześcianu.

- Graniastosłup prosty

$$P_c = 2P_p + P_b$$

$$V = P_p \cdot h$$



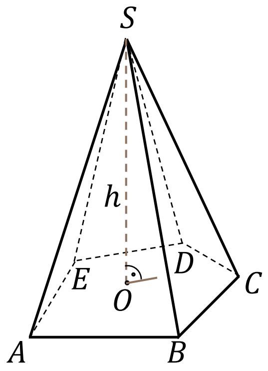
gdzie h jest wysokością graniastosłupa.

- Ostrosłup

$$P_c = P_p + P_b$$

$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



6. Rachunek prawdopodobieństwa

- Twierdzenie (klasyczna definicja prawdopodobieństwa)

Niech Ω będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia losowego A jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie $|A|$ oznacza liczbę zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu losowemu A, natomiast $|\Omega|$ – liczbę elementów zbioru Ω.

- Własności prawdopodobieństwa

$0 \leq P(A) \leq 1$ dla każdego zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(\emptyset) = 0$ prawdopodobieństwo zdarzenia niemożliwego

$P(\Omega) = 1$ prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego

7. Parametry danych statystycznych

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$